**Statistique mathématique I** **STT-16558**
**4 octobre 2007** **15h30-17h30**

**Épreuve partielle #1**

RÉPONDRE À EXACTEMENT CINQ (5) QUESTIONS.

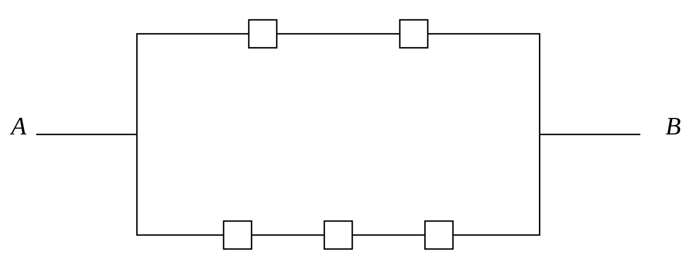
**(20 points)**
**1)** Soient $\overline{X}$ et $\overline{Y}$ les moyennes de deux échantillons aléatoires indépendants $X_1, X_2, X_3, X_4$ et $Y_1, Y_2, Y_3, Y_4$, provenant respectivement des lois $N(10, 9)$ et $N(3, 4)$. Calculer
$$P(\overline{X} > 3\overline{Y}).$$

**(20 points)**
**2)** Soient $X_1, X_2$ deux nombres choisis au hasard dans $[0, 1]$ selon la loi uniforme. Calculer la probabilité de chacun des deux événements suivants :

a) le plus petit des deux nombres est $< 1/4$ et, en même temps, le plus grand est entre $1/2$ et $3/4$ ;

b) le plus grand des deux nombres est au moins ($\geq$) trois fois plus grand que le plus petit.

**(20 points)**
**3)** Le diagramme suivant représente un système permettant à un courant de circuler du point A au point B. Ce système est composé de deux sous-systèmes en parallèle, l'un comportant deux composants en série, l'autre trois en série également. Le système fonctionne si et seulement si au moins un des sous-systèmes fonctionne, et un sous-système fonctionne si et seulement si tous ses composants fonctionnent.




On suppose que chacun des composants a une durée de vie aléatoire exponentielle de paramètre $\lambda$ et que ces durées de vie sont indépendantes.

↪ **suite à la page suivante**

On appelle durée de vie d'un système le temps pendant lequel le système fonctionne.

a) Déterminer la loi de la durée de vie de chacun des sous-systèmes.

b) Déterminer la loi de la durée de vie du système.

**Rappel.** La loi exponentielle de paramètre $\lambda$ coïncide avec la loi gamma de paramètres $\alpha = 1$ et $\lambda$.

**(20 points)**
**4)** a) Calculer la fonction génératrice des moments (f.g.m.) de la loi uniforme sur l'intervalle $[-2, 2]$.

b) Soit $X$ une variable aléatoire exponentielle de paramètre $\lambda$. À l'aide de la f.g.m., calculer $E(X), E(X^2)$, puis $E(X^m)$ pour tout entier $m \geq 1$.

**(20 points)**
**5)** Soit $X_1, \ldots, X_{25}$ un échantillon aléatoire de la loi de Bernoulli de paramètre $p$. Montrer que

a) $\overline{X}$ et $S^2$ sont non corrélées si et seulement si $p = 1/2$.

b) $\overline{X}$ et $S^2$ sont corrélées positivement si et seulement si $p < 1/2$.

c) $\overline{X}$ et $S^2$ sont corrélées négativement si et seulement si $p > 1/2$.

**Rappel.** Soit $\rho(X, Y)$ le coefficient de corrélation entre $X$ et $Y$. On a

$$\rho(X, Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}\sqrt{\mathrm{Var}(Y)}}.$$

**(20 points)**
**6)** a) Calculer la moyenne et la variance de la moyenne échantillonnale $\overline{X}$ pour un échantillon aléatoire de taille 9 de la loi gamma de paramètres $\alpha = 5$ et $\lambda = 8$. Expliquer votre raisonnement.

b) Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires indépendantes distribuées respectivement selon les lois gamma de paramètres $\alpha, \lambda$ et $\beta, \lambda$, avec $\alpha, \beta, \lambda > 0$. Déterminer la loi de la v.a. $(X + Y)/2$. Expliquer votre raisonnement.

Jean-Claude Massé
Professeur